ENSA Al Hoceima, AP1,
Algébre 1, 2020-2021
TD2 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Exercice 1

On pose $a = 960$ et $b = 528$.

1. Calculer $pgcd(a, b)$ par l'algorithme d'Euclide, et en déduire une identité de Bézout. Calculer $ppcm(a, b)$.
2. Déterminer l'ensemble des couples (u, v) d'entiers relatifs tels que : $au + bv = pgcd(a, b)$
3. Donner la décomposition en facteurs premiers de a et b.
4. En déduire la décomposition en facteurs premiers de $pgcd(a, b)$ et $ppcm(a, b)$, et retrouver les résultats de la question 1.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :
   (a) : $212x + 45y = 3$ **(b) :** $x^2 + 5x \equiv 0\ [5]$ **(c) :** $pgcd(x; y) + ppcm(x; y) = x + y$
2. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système : $\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{p\,gcd}(x, y) = 5 \\ ppcm(x, y) = 60 \end{array} \right\}$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $(n^2 + n)\Lambda(2n + 1) = 1$

Exercice 3 : **(NombresdeMersenne)**

1. Montrez que pour tout n entier naturel > 2 , si $2^n - 1$ est premier alors n est premier
2. Montrez que $2^{11} - 1$ n'est pas premier.
3. Montrez que pour tout couple d'entier relatifs (x, y) , si $x^2 + y^2$ est divisible par 7 alors x et y sont aussi divisibles par 7.

Exercice 4

Soient $a; b; c \in \mathbb{Z}$

1. On suppose $a\Lambda b = 1$. Montrer que $(a + b)\Lambda ab = 1$.
2. Calculer $pgcd(a + b; ppcm(a; b))$.
3. Montrer que $pgcd(a; bc) = pgcd(a; c)$.
4. Montrer l'équivalence : $\exists u; v \in \mathbb{Z}\, ; au + bv = d \Leftrightarrow pgcd(a; b)/d$

Exercice 5

Soit n un entier relatif. On pose $a = 2n + 3$ et $b = 5n - 2$.

1. Calculer $5a - 2b$. En déduire le $pgcd$ de a et b en fonction de n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour quelles valeurs les nombres $2n$ et $3n + 1$ sont premiers entre eux.